# Sommes et notation $\Sigma$

## La notation $\Sigma$

**Définition 1** : Soient *m* et *n* des nombres entiers avec $m \leq n$. Si $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des nombres réels, on désigne leur somme par le symbole $\sum_{i=m}^{n} a_i$ :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n .$$

Les $a_i$ $(m \leq i \leq n)$ sont appelés les *termes* de la somme et *i* est appelé l'*indice de sommation*.

> Le symbole $\Sigma$ est la lettre grecque « sigma » majuscule. Le sigma correspond à notre s, qui est la première lettre du mot « somme ».

**Exemples** :

a) $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

b) $\sum_{i=2}^{4} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 29$

c) $\sum_{i=4}^{6} \frac{1}{2i+3} = \frac{1}{2 \cdot 4 + 3} + \frac{1}{2 \cdot 5 + 3} + \frac{1}{2 \cdot 6 + 3} = \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{503}{2145}$

> On peut prendre comme indice de sommation n'importe quelle lettre qui n'est pas déjà utilisée à une autre fin. Par exemple, $\sum_{j=1}^{5} j = 15$ et $\sum_{k=2}^{4} k^2 = 29$.

**Théorème 1** : Si *c* est une constante, on a

$$\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$$

*Preuve* : Le théorème exprime seulement que

$$c \cdot a_m + c \cdot a_{m+1} + c \cdot a_{m+2} + \ldots + c \cdot a_{n-1} + c \cdot a_n = c \cdot (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n).$$

**Théorème 2** : On a

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i .$$

*Preuve* : De nouveau, le théorème ne fait qu'exprimer que

$$\begin{aligned}(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + (a_{m+2} + b_{m+2}) + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_n + b_n) = \\ (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n) + (b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_{n-1} + b_n)\end{aligned}.$$

> On montre de la même manière que $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$ .

**Exemple :** $\sum_{k=1}^{n} k(k-3) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 3k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3k$ **.**

**Proposition 1** : $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

*Preuve* : Si $i$ varie de 1 à $n$, cela veut dire que la somme contient $n$ termes. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = n .$$

**Corollaire 1** : $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

*Preuve* : Par le théorème 1, on a

$$\sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} c1 = c\sum_{i=1}^{n} 1 = cn .$$

**Proposition 2** : $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

*Preuve* : Posons

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n .$$

On peut aussi écrire la somme à l'envers :

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 .$$

D'après le théorème 2, on aura

$$\begin{aligned} S + S &= [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n] + [n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] \\ &= [1 + n] + [2 + (n-1)] + [(3 + (n-2)] + \ldots + [(n-1) + 2] + [n+1] \end{aligned} .$$

c'est-à-dire

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n(n+1) .$$

**Proposition 3** : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Exemple :** $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2} + n$.

La proposition 3 est difficile à démontrer de manière directe. Pour la démontrer, nous allons plutôt utiliser ce qu'on appelle une *preuve par induction* ou *preuve par récurrence*.

## Preuves par induction

Les preuves par induction (ou par récurrence) sont basées sur le théorème suivant, qui résulte d'une propriété des nombres naturels :

**Théorème 3** : Supposons qu'une proposition qui dépend d'un nombre entier $n$ satisfasse les deux énoncés suivants :

1) la proposition est vraie pour $n = 1$ ; et
2) si la proposition est vraie pour un certain nombre entier $n$, cela entraîne qu'elle est automatiquement vraie pour le nombre entier suivant, $n+1$.

Dans ce cas, cette proposition est vraie pour tous les nombres entiers $n \geq 1$.

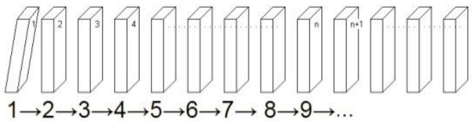

Image : Joachim Mohr via Wikimedis Commons

Le théorème 3 devient intuitivement évident lorsqu'on pense au jeu qui consiste à faire un chemin avec des dominos posés sur la tranche (on peut se faire une image mentale où le nombre de dominos serait infini) : si on fait basculer le premier des dominos et si chacun d'eux, lorsqu'il bascule, fait aussi basculer le suivant, alors ils vont tous basculer.

| |
|---|
| Dans le théorème 3, on peut remplacer le deuxième énoncé par : |
| 2') si la proposition est vraie pour $n-1$ ($n$ entier > 1), cela entraîne qu'elle est vraie pour $n$. |
| Cette formulation peut conduire à des manipulations algébriques plus simples. |

À titre d'exemple, redémontrons par induction la proposition 2, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, en utilisant cette formulation :

1) $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. La formule est vraie pour $n=1$.

2) La formule pour $n-1$ est $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$ (pour le voir, il suffit de remplacer partout dans la formule $n$ par $n$-1). Si elle est vraie, alors la formule $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est également vraie, puisque

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2-n}{2} + n == \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

## Retour aux sommes

Donnons maintenant la preuve de la proposition 3 :

1) $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. La formule est vraie pour $n=1$.

2) La formule pour $n-1$ est $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Si elle est vraie, alors la formule $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est également vraie, puisque

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = n\left[\frac{(n-1)(2n-1)}{6} + n\right] =$$

$$n\left[\frac{2n^2-3n+1}{6} + n\right] = n\frac{2n^2+3n+1}{6} = n\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Proposition 4** : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

La preuve de cette proposition, que nous laissons en exercice, est similaire à celle de la proposition 3. Elle utilise le fait que $(n-1)^2 + 4n = (n+1)^2$.

Si on compare les résultats des propositions 2 et 4, on constate que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Ce résultat à la fois intéressant et curieux a été démontré géométriquement par le mathématicien arabe al-Karaji dans les années mille.

**Exercice** : Utilisez les théorèmes 1 et 2 pour calculer $\sum_{i=1}^{n}(2i^3+3i+5)$.