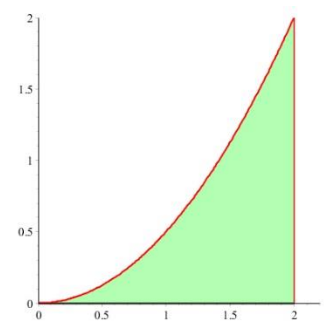
Calcul d'aire : un exemple

Aire d'un triangle curviligne



Problème : Nous voulons calculer l'aire A de la figure en vert illustrée à droite. Il s'agit d'un triangle curviligne délimité par l'axe des x, la droite verticale $x = 2$, et la courbe $y = x^2 / 2$.

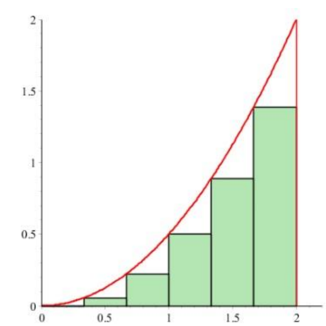
Si on était en présence d'un triangle ordinaire, on pourrait utiliser la formule habituelle pour l'aire ; ce qui complique les choses, c'est qu'un des côtés du triangle est une courbe. Il va donc falloir trouver une autre méthode.

La technique qu'on va utiliser consiste à approximer la figure en utilisant un nombre fini de rectangles. En additionnant les aires de ces rectangles, nous obtiendront une valeur approximative de l'aire de la figure.

Pour simplifier le raisonnement, on se limitera à des triangles de largeurs égales.

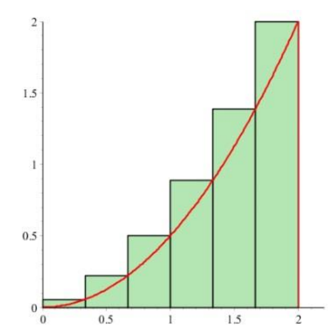
Les deux figures suivantes, à droite, illustrent deux situations possibles avec des rectangles de largeur 1/3 (soit le sixième de l'intervalle [0, 2]). Les coins inférieurs sont situés sur l'axe des x à des valeurs de x qui sont :

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1/3,\ x_2 = 2/3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4/3,\ x_5 = 5/3 \text{ et } x_6 = 2.$$



Dans le premier cas, les rectangles sont choisis de telle manière qu'ils soient les plus hauts possible tout en restant à l'intérieur de la figure. Les coins supérieurs gauches sont sur la courbe $y = x^2 / 2$ et leurs hauteurs sont donc (en notant que $2 \cdot 3^2 = 18$) :

$$h_1 = 1/18,\ h_2 = 4/18,\ h_3 = 1/2 = 9/18,\ h_4 = 16/18 \text{ et } h_5 = 25/18.$$



Dans le deuxième cas, les rectangles sont maintenant choisis avec les coins supérieurs droits sur la courbe, de manière à ce que la figure soit contenue dans l'ensemble des rectangles. Les cinq premiers auront les mêmes hauteurs, h_1, h_2, h_3, h_4 et h_5, alors que le dernier aura pour hauteur :

$$h_6 = 2 = 36/18.$$

Pour obtenir les aires de ces cinq ou six rectangles, il faut multiplier leurs hauteurs par leur largeur commune qui est 1/3 : cela donne

$$A_1 = 1/54,\ A_2 = 4/54,\ A_3 = 9/54,\ A_4 = 16/54,\ A_5 = 25/54 \text{ et } A_6 = 36/54,$$

et on constate que $A_k = k^2/54$. En utilisant les résultats de la section précédente, on voit que dans le premier cas, l'aire en vert est

$$\sum_{k=1}^{5} A_k = \frac{1}{54}\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5\cdot 6\cdot 11}{54\cdot 6} = \frac{55}{54},$$

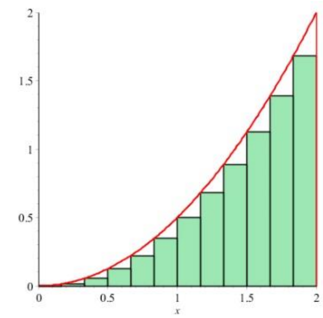
alors que dans le second cas, elle est

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = \frac{1}{54}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6\cdot 7\cdot 13}{54\cdot 6} = \frac{91}{54}$$

Au vu des figures, il est clair que l'aire A qu'on cherche doit être entre ces deux valeurs :

$$\frac{55}{54} \le A \le \frac{91}{54}$$

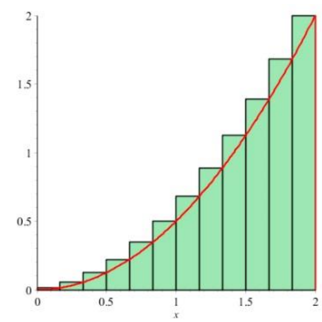
(on va voir que la réponse exacte est $A = 4/3 = 72/54$).



Amélioration de la précision

Ces résultats sont loin d'être précis, mais il est possible d'améliorer la précision en augmentant le nombre de rectangles, comme on peut le constater sur les nouvelles figures à droite. Si on utilise des rectangles de largeur $2/n$, la situation sera similaire à ce qu'on a plus haut, avec $x_k = 2k/n$ et $h_k = x_k^2/2 = (2k/n)^2/2$ (voir la figure du bas). On aura

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \le A \le \sum_{k=1}^{n} A_k$$

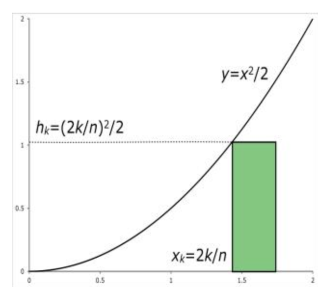


où

$$A_k = \frac{2}{n}\cdot h_k = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{4k^2}{n^3}.$$

Donc,

$$\frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \le A \le \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2,$$



c'est-à-dire

$$\frac{4}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \le A \le \frac{4}{n^3}\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}\frac{(n\pm 1)n(2n\pm 1)}{6} = \frac{4}{3},$$

le « théorème du sandwich » nous dit qu'on doit avoir $A = 4/3$.